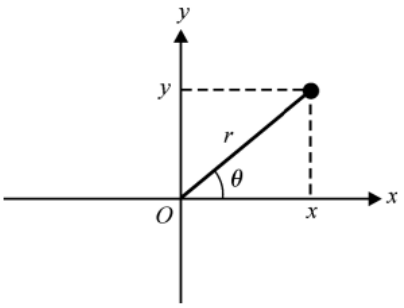
فصل ۸

حرکت دورانی

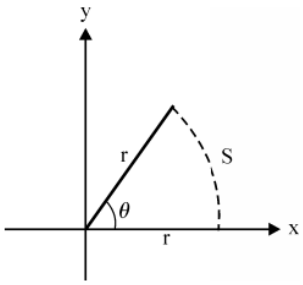
۸-۱- متغیرهای دورانی

مکان زاویه‌ای



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

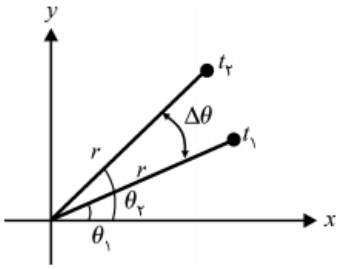
شکل ۸-۱



$$\theta = \frac{s}{r}$$

شکل ۸-۲

جابه‌جایی زاویه‌ای



$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

شکل ۸-۳

سرعت زاویه‌ای

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

شتاب زاویه‌ای

$$\overline{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

مثال (۸-۱). زاویه‌ای که یک چرخ لنگر در بازهٔ زمانی t طی می‌کند از رابطهٔ $\theta = ۳t^{۴} - ۲t^{۳} + ۵t$ به‌دست می‌آید. رابطهٔ شتاب زاویهٔ چرخ چگونه است و شتاب چرخ را در $t = ۱s$ به‌دست آورید.

حل:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = ۱۲t^{۳} - ۶t^{۲} + ۵$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = ۳۶t^{۲} - ۱۲t \xrightarrow{t=۱} \alpha = ۳۶(۱)^{۲} - ۱۲(۱) = ۲۴\ rad/s^{۲}$$

۸-۲- حرکت دورانی با شتاب زاویهٔ ثابت

حرکت انتقالی (امتداد ثابت)	حرکت دورانی (محور ثابت)
$v = at + v_{۰}$	$\omega = \alpha t + \omega_{۰}$
$\Delta x = \frac{v + v_{۰}}{۲} t$	$\Delta\theta = \frac{\omega + \omega_{۰}}{۲} t$
$\Delta x = \frac{۱}{۲} a t^{۲} + v_{۰} t$	$\Delta\theta = \frac{۱}{۲} \alpha t^{۲} + \omega_{۰} t$
$v^{۲} = v_{۰}^{۲} + ۲a\Delta x$	$\omega^{۲} = \omega_{۰}^{۲} + ۲\alpha\Delta\theta$

مثال (۸-۲). یک سنگ سمباده از حال سکون با شتاب زاویه‌ای $۳\ rad/s^{۲}$ شروع به دوران می‌کند.

الف) جابه‌جایی زاویه‌ای، تعداد دورها و سرعت زاویه‌ای یک نقطه روی لبهٔ سنگ سمباده پس از ۲ ثانیه را به‌دست آورید.

ب) اگر پس از گذشت زمان یک دقیقه که سنگ کار کرد آن را خاموش کنیم و با شتاب زاویه‌ای $۴\ rad/s^{۲}$ حرکت آن کند شود چه مدت بعد از خاموش شدن سنگ از حرکت باز می‌ایستد.

حل:

الف) α و t معلومند و می‌خواهیم $\Delta\theta$ را پیدا کنیم پس از رابطه (۸-۸) خواهیم داشت:

$$\Delta\theta = \frac{۱}{۲} \alpha t^{۲} + \omega_{۰} t$$

در $t = ۰$ داریم $\omega_{۰} = ۰$

جابه‌جایی زاویه‌ای

$$\Delta\theta = \frac{۱}{۲}(۳\ rad/s^{۲})(۲s)^{۲} = ۶\ rad$$

تعداد دورها

$$n = \frac{\Delta\theta}{۲\pi} = \frac{۶}{۲ \times ۳/۱۴} = ۰/۹۶\ rev$$

سرعت زاویه‌ای در لحظه $t = ۲$

$$\omega = \alpha t + \omega_{۰} = ۳ \times ۲ = ۶\ rad/s$$

ب) شتاب کند شدن $\alpha = -۴\ rad/s^{۲}$ است و سرعت زاویه‌ای در $t = ۶۰$ عبارت است از:

$$\omega = \alpha t + \omega_{\circ} = ۳ \times ۶۰ = ۱۸۰ \, rad/s$$

حال با در نظر گرفتن α = -۴ زمان ایستادن یعنی رسیدن مجدد ω به صفر برابر است با:

$$\omega = \alpha t + \omega_{\circ} \Rightarrow \circ = -۴t + ۱۸۰ \Rightarrow t = \frac{۱۸۰}{۴} = ۴۵ s$$

مثال (۸-۳). سرعت زاویه‌ای صفحهٔ دوار گرامافونی که در حال دوران است در مدت یک دقیقه از ۳۰۰ دور در دقیقه به ۲۲۵ دور در دقیقه می‌رسد.

الف) شتاب زاویه‌ای متوسط را در این بازهٔ زمانی پیدا کنید.

ب) با فرض ثابت ماندن این شتاب، حساب کنید چه مدت طول می‌کشد تا دستگاه چرخنده متوقف شود؟

ج) صفحه گرامافون بعد از دومین مشاهده شما چند دور می‌زند؟

حل:

الف)

$$\omega_{\circ} = ۳۰۰ rev/min = ۳۰۰ \times \frac{۲\pi}{۶۰} = ۳۱/۴ \ rad/s$$

$$\omega = ۲۲۵ rev/min = ۲۲۵ \times \frac{۲\pi}{۶۰} = ۲۳/۵۵ \ rad/s$$

$$\overline{\alpha} = \frac{\omega - \omega_{\circ}}{t} = \frac{۲۳/۵۵ - ۳۱/۴}{۶۰} = -۰/۱۳ \, rad/s^{۲}$$

ب)

$$\omega = \alpha t + \omega_{\circ} \qquad \text{شتاب ثابت} \quad \alpha = \overline{\alpha} = -۰/۱۳ \, rad/s^{۲}$$

$$\circ = -۰/۱۳ t + ۲۳/۵۵ \qquad t = \frac{۲۳/۵۵}{۰/۱۳} = ۱۸۱/۱۵ s$$

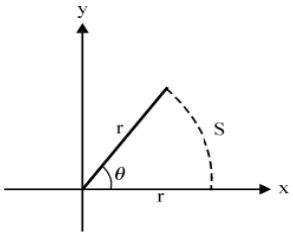
ج)

$$\omega^{۲} - \omega_{\circ}^{۲} = ۲\alpha\Delta\theta \qquad \circ - (۲۳/۵۵)^{۲} = ۲ \times (-۰/۱۳) \Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{(۲۳/۵۵)^{۲}}{۲ \times ۰/۱۳} = ۲۱۳۳ \, rad$$

تعداد دورها $n = \frac{\Delta\theta}{۲\pi} = ۳۳۹/۶$

۸-۴- رابطه بین متغیرهای زاویه‌ای و خطی



شکل ۸-۲

رابطه مکان خطی و مکان زاویه‌ای (θ , s)

$$S = r\theta$$

رابطه سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای (ω , v)

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

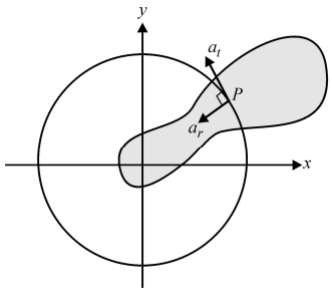
$$v = r\,\omega$$

رابطه شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای (α , a)

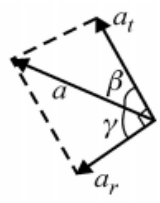
$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\,\alpha$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$



(الف)



(ب)

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

$$\tan\beta = \frac{a_r}{a_t}$$

مثال (۸–۵). صفحه گرامافونی با شتاب زاویه‌ای ثابت $\alpha = ۳\ \mathrm{rad/s^2}$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. اگر شعاع یک نقطه روی آن ۱۰ cm باشد:

الف) سرعت خطی یا مماسی این نقطه پس از ۴ ثانیه چقدر است؟

ب) شتاب مماسی این نقطه را به‌دست آورید.

ج) شتاب مرکزگرای این نقطه و شتاب کل این نقطه پس از ۴ ثانیه چقدر است؟

د) این محاسبات برای ذره روی محیط صفحه به فاصله ۲۰ cm از مرکز چقدر به‌دست می‌آید؟

حل: بعد از ۴ ثانیه داریم:

$$\omega_\circ = \circ \qquad \text{و} \qquad \alpha = ۳\ \mathrm{rad/s^2}$$

الف)

$$\omega = \alpha t + \omega_\circ = ۳ \times ۴ = ۱۲\ \mathrm{rad/s}$$

$$v = r\,\omega = ۰/۱ \times ۱۲ = ۱/۲\ \mathrm{m/s}$$

ب) $a_t = r\alpha = ۰/۱ \times ۳ = ۰/۳ \ m/s^۲$

ج) $a_r = \frac{v^۲}{r} = r\omega^۲ = ۰/۱ \times (۱۲)^۲ = ۱۴/۴ \, m/s^۲$

$a = \sqrt{a_t^۲ + a_r^۲} = \sqrt{(۰/۳)^۲ + (۱۴/۴)^۲} = ۱۴/۴۰۳ \ m/s^۲$

د) متغیرهای زاویه‌ای برای نقطه فوق و نقطه‌ای روی محیط صفحه یکسان‌اند.

$\omega = ۱۲ \ rad/s$ و $\alpha = ۳ \ rad/s^۲$

اما متغیرهای خطی به‌دلیل اینکه شعاع نقطه تغییر کرده، یکسان نیستند:

$r = ۰/۲ m$

$v = ۰/۲ \times ۱۲ = ۲/۴ \ m/s$

$a_t = r\alpha = ۰/۲ \times ۳ = ۰/۶ \ m/s^۲$

$a_r = \frac{v^۲}{r} = r\omega^۲ = ۰/۲(۱۲)^۲ = ۲۸/۸ \ m/s^۲$